Filtrage d'une diffusion réfléchie à sauts observée à travers un processus ponctuel marque

Zusheng Rao

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Filtrage d'une diffusion réfléchie à sauts, observée à travers un processus ponctuel marqué

Zusheng RAO

N° 2106

Novembre 1993

PROGRAMME 5

Traitement du signal,
automatique
et productique

Rapport de recherche

1993

ISSN 0249-6399

Filtrage d'une diffusion réfléchie à sauts, observée à travers un processus ponctuel marqué *

Zusheng RAO **

Programme 5 — Traitement du signal, automatique et productique
Projet Mefisto

Rapport de recherche n° 2106 — Novembre 1993 — 19 pages

Résumé : On étudie un problème de filtrage où le signal est une diffusion réfléchie à sauts, et l'observation un processus ponctuel marqué à valeurs entières de type Poisson.

On obtient l'équation de type Zakai pour la loi conditionnelle non–normalisée par la méthode de la probabilité de référence. On obtient aussi l'équation pour la loi conditionnelle normalisée.

Enfin, on trouve un filtre approché en dimension finie dans le cas particulier où le signal est une diffusion réfléchie à valeurs postives en dimension un, et l'observation un processus de Poisson généralisé de grande intensité.

Mots-clé : filtrage non linéaire, diffusion réfléchie à sauts, processus ponctuel marqué, filtre approché, calcul différentiel stochastique.

(Abstract: pto)

*. Etude partiellement financée par le Projet Mefisto (unité de recherche Sophia–Antipolis)

**. Laboratoire d'APT, URA 225, Université de Provence, 3, Place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France.

Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : (33) 93 65 77 77 – Télécopie : (33) 93 65 77 65

Filtering of a Reflected Diffusion Processes with Jumps by a Poisson–type Marked Point Process

Abstract: We consider a nonlinear filtering problem, where the signal is a reflected diffusion process with jumps, and the observation is a Poisson-type marked point process, whose stochastic intensity depends on the signal. We get a generalized Zakai-type equation for the non-normalized conditional law by using the reference probability method. We also deduce the equation for the normalized conditional law.

At last, we get a asymptotically efficient approximate finit dimensional filter in the special case where the signal is a continous positive reflected diffusion in one dimension and the observation is a Poisson process with large intensity.

Key-words: nonlinear filtering, reflected diffusion with jumps, marked point process, approximate filter, stochastic differential calculus.

Table des matières

1 Équations du filtrage

1.1 Position du problème

On étudie un problème de filtrage où le signal est une diffusion réfléchie à sauts et l'observation est un processus ponctuel marqué à valeurs entières de type Poisson.

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \overline{P}, \mathcal{G}_t, W_t, \mu_{tz}, t \geq 0, z \in Z)$ un espace de Wiener-Poissson complet sur $I\!R^m \times Z$. C'est à dire, $(\Omega, \mathcal{G}, \overline{P})$ est un espace de probabilité complet, $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ est une filtration de $\mathcal{G}$ complète et continue à droite. $(W_t, t \geq 0)$ est un processus de Wiener standard à valeurs dans $I\!R^m$ sous $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$. $(Z, \mathcal{Z})$ est un espace de marques muni d'une mesure γ qui est σ-finie. Un exemple typique pour Z est $I\!R^m - \{\mathbf{0}\}$, où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de $I\!R^m$. $(\mu_{tz}, t \geq 0, z \in Z)$ est une mesure aléatoire de Poisson standard indépendante de $(W_t, t \geq 0)$. Ce qui implique que μ_{tz} est une mesure aléatoire à valeurs entières et pour tout $B \in \mathcal{Z}$ tel que $\gamma(B) < \infty$, $\mu((0,t] \times B)$ est un processus de Poisson d'intensité $\gamma(B)$ sous $(\Omega, \mathcal{G}, \overline{P}, \mathcal{G}_t, t \geq 0)$.

Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $I\!R^+$. Nous rappellons qu'une mesure aléatoire μ_{tz} est dite à valeurs entières si $\mu(\omega, \{t\} \times Z) \leq 1$ pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{Z}$, $\mu(A \times B)$ est à valeure dans $I\!N \cup \{+\infty\}$.

Soit D un ensemble ouvert de $I\!R^m$. On suppose qu'il existe une fonction $q(x) \in C^2(I\!R^m, I\!R)$ telle que $|\nabla q(x)| \geq 1$ pour tout $x \in \partial D$ et

$$D = \{x \in I\!R^m : q(x) < 0\}, \;\; \partial D = \{x \in I\!R^m : q(x) = 0\}.$$

On note $\mathbf{n}_x$ le vecteur unitaire normal à ∂D en x, dirigé vers l'intérieur de D. Soit $\mathbf{v}$ un champs des vecteurs sur un voisinage de ∂D tel que:

$$\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{n}_x \geq \delta > 0, \quad \forall x \in \partial D$$

Soient $b \in C_b(I\!R^+ \times \overline{D}, I\!R^m)$, $f \in C_b(I\!R^+ \times \overline{D}, I\!R^m \times I\!R^m)$, $g \in C(I\!R^+ \times \overline{D} \times Z, I\!R^m)$ et $h \in C_b(I\!R^+ \times \overline{D} \times Z, I\!R^+)$.

On suppose qu'il existe une constante positive C fixée telle que

$$|b(t,x)| \leq C(1 + |x|) \tag{1.1}$$

$$|f(t,x)| \leq C \tag{1.2}$$

$$\int_Z |g(t,x,z)|^2 \gamma(dz) \leq C \tag{1.3}$$

$$\int_Z |h(t,x,z)-1|^2\gamma(dz) \leq C \tag{1.4}$$

$$x+g(t,x,z)\in \overline{D} \tag{1.5}$$

pour tout $t\geq 0$, $x\in\overline{D}$ et $z\in Z$.

On suppose de plus qu'il existe une constante positive $C(n)$ dépendant de n telle que

$$|b(t,x_1)-b(t,x_2)|+|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq C(n)|x_1-x_2| \tag{1.6}$$

$$\int_Z |g(t,x_1,z)-g(t,x_2,z)|^2\gamma(dz)\leq C(n)|x_1-x_2|^2 \tag{1.7}$$

$$\int_Z |h(t,x_1,z)-h(t,x_2,z)|^2\gamma(dz)\leq C(n)|x_1-x_2|^2 \tag{1.8}$$

pour tout $t\geq 0$, $x_1,x_2\in\overline{D}$, $z\in Z$ et $|x_1|$, $|x_2|\leq n$ avec $n\in\mathbb{N}$. $|\cdot|$ désigne respectivement la norme usuelle dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ selon le contexte.

Alors, on a le

Lemme 1.1 *Sous les conditions (1.1)-(1.8), le système suivant*

$$\begin{cases} X_t = X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t f(s,X_s)dW_s+\Phi_t \\ \qquad\qquad +\int_0^t\int_Z g(s,X_{s^-},z)(\mu(ds\times dz)-h(s,X_s,z)\gamma(dz)\times ds) \\ \Phi_t=\int_0^t \mathbf{v}_{X_s}d|\Phi|_s \\ |\Phi|_t=\int_0^t \mathbf{1}_{\{X(s)\in\partial D\}}d|\Phi|_s \\ X_0\in\overline{D},\;\; \Phi_0=0,\;\; X_t\in\overline{D}\;\;\forall t\geq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

où Φ_t est continue et à variation bornée et $|\Phi|_t$ est la variation totale de la fonction Φ sous $[0,t]$, admet une solution unique (X_t,Φ_t) forte.

Preuve Soit $\overline{b}(t,x)=b(t,x)-\int_Z g(t,x,z)(h(t,x,z)-1)\gamma(dz)$, alors l'équation de X_t dans le système (1.9) devient:

$$X_t=X_0+\int_0^t \overline{b}(s,X_s)ds+\int_0^t f(s,X_s)dW_s+\int_0^t\int_Z g(s,X_{s^-},z)d\overline{\mu}_{sz}+\Phi_t$$

D'après [8], Il nous suffit de vérifier que $\frac{|\overline{b}(t,x)|}{1+|x|}$ est borné uniformément et $\overline{b}(t,x)$ est localement lipschitzien par rapport à x pour que le système (1.9) admette une solution unique forte. L'inégalité de Cauchy-Swartz donne:

$$\begin{aligned} |\overline{b}(t,x)| &\leq |b(t,x)|+\frac{1}{2}\left(\int_Z |g(t,x,z)|^2\gamma(dz)+\int_Z |h(t,x,z)-1|^2\gamma(dz)\right) \\ &\leq 2C(1+|x|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& |\overline{b}(t,x_1) - \overline{b}(t,x_2)| \\
\leq\ & |b(t,x_1) - b(t,x_2)| + \left| \int_Z g(t,x_2,z)(h(t,x_1,z) - h(t,x_2,z))\gamma(dz) \right| \\
& + \left| \int_Z (h(t,x_1,z) - 1)(g(t,x_1,z) - g(t,x_2,z))\gamma(dz) \right| \\
\leq\ & |b(t,x_1) - b(t,x_2)| \\
& + \sqrt{\int_Z |g(t,x_2,z)|^2 \gamma(dz) \cdot \int_Z |h(t,x_1,z) - h(t,x_2,z)|^2 \gamma(dz)} \\
& + \sqrt{\int_Z |h(t,x_1,z) - 1|^2 \gamma(dz) \cdot \int_Z |g(t,x_1,z) - g(t,x_2,z)|^2 \gamma(dz)} \\
\leq\ & \left[C(n) + 2\sqrt{C \cdot C(n)} \right] |x_1 - x_2|
\end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$, $x, x_1, x_2 \in \overline{D}$ et $|x_1|, |x_2| \leq n$. □

Remarque 1.2 La condition (1.5) nous garantit que X_t reste toujours dans $\overline{D}$ après les sauts éventuels. Si $g = \mathbf{0}$, on n'a pas besoin des conditions (1.4) et (1.8). En effet, la fonction h n'intervient plus dans le système (1.9) et X_t devient une diffusion réfléchie dans $\overline{D}$. Dans ce cas, la condition sur D peut être beaucoup plus générale (voir par exemple [5], [7] et [13]).

Soit $E = \{(\omega, t) : \mu(\omega, \{t\} \times Z) = 1\}$. Si $(\omega, t) \in E$, on note $p_t(\omega)$ le seul point de E tel que $\mu(\omega, \{t\} \times \{p_t\}) = 1$, c'est à dire $\mu(\omega, \{t\} \times dz) = \delta_{p_t(\omega)}(dz)$ où δ est la mesure de dirac sur Z. Et on pose par convention $p_t(\omega) = \kappa$ si $(\omega, t) \notin E$ où κ est un point extérieur à Z.

On définit la tribu naturelle de μ par

$$\mathcal{F}_t^\mu = \sigma\{\mu(]0, s] \times B) : s \leq t, B \in \mathcal{Z}\}.$$

Posons $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \bigvee \mathcal{F}_t^\mu$.

Pour simplifier les écritures, on définit les mesures aléatoires $\tilde{\mu}$ et $\overline{\mu}$ par

$$\tilde{\mu}(A \times B) = \mu(A \times B) - \int_A \int_B h(s, X_s, z)\gamma(dz)ds$$

$$\overline{\mu}(A \times B) = \mu(A \times B) - m(A)\gamma(B)$$

où $A \in \mathcal{B}$, $B \in \mathcal{Z}$ et $m(A)$ est la mesure de Borel de A.

On note aussi:

$$d\overline{\mu}_{tz} = \overline{\mu}(dt \times dz) = \mu(dt \times dz) - dt \times \gamma(dz)$$

et

$$d\tilde{\mu}_{tz} = \tilde{\mu}(dt \times dz) = \mu(dt \times dz) - h(t, X_t, z)dt \times \gamma(dz)$$

Soit

$$\begin{aligned} L_t^s &= \Pi_{\{r\in(s,t],(\omega,r)\in E\}} h(r, X_{r-}, p_r) e^{1-h(r,X_{r-},p_r)} \times \\ & \quad exp\left\{ - \int_{(s,t]\times Z} (h(r, X_{r-}, z) - 1) d\overline{\mu}_{rz} \right\} \end{aligned}$$

D'après la formule générale de l'exponentielle de Doléans, L_t^s est l'unique solution forte de l'équation suivante:

$$L_t^s = 1 + \int_s^t L_{r-}^s \int_Z (h(r, X_{r-}, z) - 1) d\overline{\mu}_{rz} \tag{1.10}$$

où $0 \leq s \leq t$.

Notons que la condition (1.4) nous garantit que $L_t^s \in L^2(\Omega, \overline{P})$ et $\overline{E}(L_t^s) = 1$.

En effet, d'après (1.10) et la définition de μ, on a

$$\begin{aligned} \overline{E}(L_t^s)^2 &\leq 2\left[1 + \overline{E}\left(\int_s^t L_{r-}^s \int_Z (h(r, X_{r-}, z) - 1) d\overline{\mu}_{rz}\right)^2\right] \\ &\leq 2 + 2\overline{E}\left(\int_s^t (L_{r-}^s)^2 \int_Z |h(r, X_{r-}, z) - 1|^2 \gamma(dz) \times dr\right) \\ &\leq 2 + 2C\overline{E}\left(\int_s^t (L_{r-}^s)^2 dr\right) \\ &= 2 + 2C \int_s^t \overline{E}(L_{r-}^s)^2 dr \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{E}(L_t^s)^2 \leq 2e^{2C(t-s)} \tag{1.11}$$

et $L_t^s \in L^2(\Omega, \overline{P})$. Ce qui implique de plus

$$\overline{E}\left(\int_s^t (L_{r-}^s)^2 \int_Z |h(r, X_{r-}, z) - 1|^2 \gamma(dz) \times dr\right) \leq C \int_s^t \overline{E}(L_r^s)^2 dr \leq \infty$$

et $\overline{E}(L_t^s) = 1 + \overline{E}\left(\int_s^t L_{r-}^s \int_Z (h(r, X_{r-}, z) - 1) d\overline{\mu}_{rz}\right) = 1.$

On définit la mesure de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que:

$$\left.\frac{dP}{d\overline{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t^0.$$

D'après [2], $\mu((0,t] \times B)$ est un $(\mathcal{F}_t, P)$ "processus de Poisson généralisé" d'intensité $\int_B h(t, X_t, z)\gamma(dz)$, c'est à dire $\mu((0,t] \times B)$ est un processus de comptage et $\tilde{\mu}((0,t] \times B)$ est une $(\mathcal{F}_t, P)$ martingale.

Notre but est de calculer l'espérance conditionnelle sous P de X_t sachant $\mathcal{F}_t^\mu$. On a le

Lemme 1.3 *1) Pour tout $B \in \mathcal{Z}$ tel que $\gamma(B) < \infty$, $\tilde{\mu}((0,t] \times B)$ est une martingale et $\mu(]0,t] \times B)$ un processus de Poisson d'intensité $\int_B h(t, X_t, z)\gamma(dz)$ sous $(\mathcal{F}_t, P)$.*

2) Pour tout $t \geq 0$ et $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, on a $\xi L_t^0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \overline{P})$ et

$$E(\xi/\mathcal{F}_t^\mu) = \frac{\overline{E}(\xi L_t^0/\mathcal{F}_t^\mu)}{\overline{E}(L_t^0/\mathcal{F}_t^\mu)}.$$

Remarque 1.4 Dans le cas général $g \neq \mathbf{0}$, il nous semble difficile de définir directement l'espace de probabilité P pour assurer une solution unique (X_t, Φ_t, μ_{tz}) pour le système (1.9) en demandant que $\tilde{\mu}_{tz}$ soit une mesure martingale. Donc on est obligé de définir tout d'abord la probabilité de référence $\overline{P}$.

1.2 Équation de Zakai pour la loi conditionnelle non-normalisée

Notons $Z_\kappa = Z \cup \{\kappa\}$ et étendons la fonction g sur $I\!R^+ \times \overline{D} \times Z_\kappa$ en posant $g(\cdot, \cdot, \kappa) = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ représente le vecteur nul dans $I\!R^m$. h peut être prolongée sur $I\!R^+ \times \overline{D} \times Z_\kappa$ en posant $h(\cdot, \cdot, \kappa) = 1$. On peut aussi étendre γ sur $(Z_\kappa, \mathcal{Z}_\kappa)$ et μ sur $(I\!R^+ \times Z_\kappa)$ en donnant la valeur 0 au point κ et sur $I\!R^+ \times \{\kappa\}$

Pour obtenir l'équation de type de Zakai pour la loi conditionnelle non-normalisée, on donne tout d'abord le

Lemme 1.5 *Soit* $\{U_{tz}, t \geq 0\}$ *et* $\{V_{tz}, t \geq 0\}$ *des processus* $\mathcal{F}_t$*−progressifs tels que*

$$\int_0^t \int_Z (U_{sz}^2 + V_{sz}^2)\gamma(dz) \times ds < \infty, \quad p.s.$$

On pose

$$\overline{U}_t = \int_0^t \int_Z U_{sz} d\overline{\mu}_{sz}, \quad \overline{V}_t = \int_0^t \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_{sz}$$

On a, alors,

$$[\overline{U}, \overline{V}]_t = \int_0^t \int_Z U_{sz} V_{sz} d\mu_{sz}$$

Preuve Il nous suffit de le vérifier pour U_{sz} et V_{sz} des formes $\rho_r \mathbf{1}_{(r,s]} \mathbf{1}_{\{z \in B\}}$ où $0 \leq r < s \leq t$, ρ_r est $\mathcal{F}_r$ mesurable et $B \in \mathcal{Z}$. □

Soit $a(t,x) = ff^*(t,x)$ et $\varphi \in C_b^2(\overline{D})$.

On définit les opérateurs

$$\mathcal{L}_t\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^m b_i(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

$$\mathcal{H}_{tz}\varphi(x) = h(t,x,z)\varphi(x + g(t,x,z))$$

$$\mathcal{U}_{tz}\varphi(x) = h(t,x,z)\varphi(x + g(t,x,z)) - \varphi(x)$$

$$\mathcal{V}_{tz}\varphi(x) = h(t,x,z)[\varphi(x + g(t,x,z)) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \bullet g(t,x,z)]$$

$$\mathcal{W}_{tz}\varphi(x) = \varphi(x + g(s,x,z)) - \varphi(x) - h(s,x,z)\nabla\varphi(x) \bullet g(s,x,z)$$

où $\bullet$ désigne le produit scalaire dans $I\!R^m$.

On pose

$$\Sigma_t(\varphi) = \overline{E}(\varphi(X_t) L_t^0 / \mathcal{F}_t^\mu), \ \Sigma_{t^-}(\varphi) = \overline{E}(\varphi(X_{t^-}) L_{t^-}^0 / \mathcal{F}_{t^-}^\mu)$$

Théorème 1.6 *Sous les conditions du lemme 1.1, si* $\varphi \in C_b^2(\overline{D})$ *et* $\nabla\varphi(x) \bullet \mathbf{v}(x) = 0$ *pour tout* $x \in \partial D$*, alors,*

$$\begin{aligned} \Sigma_t(\varphi) &= \Sigma_0(\varphi) + \int_0^t \Sigma_s(\mathcal{L}_s\varphi) ds + \int_0^t \int_Z \Sigma_{s^-}(\mathcal{U}_{sz}\varphi) d\overline{\mu}_{sz} \\ &\quad + \int_0^t \int_Z \Sigma_s(\mathcal{V}_{sz}\varphi)\gamma(dz) \times ds \end{aligned} \tag{1.12}$$

Preuve D'après la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
&\varphi(X_t)\\
= \;& \varphi(X_0) + \int_0^t \nabla\varphi(X_{s^-}) \bullet dX_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\int_0^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s^-})d[X_i^c, X_j^c]_s\\
&+ \sum_{0<s\leq t}\{\Delta\varphi(X_s) - \nabla\varphi(X_{s^-}) \bullet \Delta X_s\}\\
= \;& \varphi(X_0) + \int_0^t (\mathcal{L}_s\varphi)(X_s)ds + \int_s^t \nabla\varphi(X_s)f(s,X_s)dW_s\\
&+ \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s\in\partial D\}}\nabla\varphi(X_s)\bullet \mathbf{v}_{X_s}d|\Phi|_s + \int_0^t\int_Z \nabla\varphi(X_{s^-})\bullet g(s,X_{s^-},z)d\tilde{\mu}_{sz}\\
&+ \sum_{0<s\leq t}\{\varphi(X_{s^-} + g(s,X_{s^-},p_s)) - \varphi(X_{s^-}) - \nabla\varphi(X_{s^-})\bullet g(s,X_{s^-},p_s)\}
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<s\leq t}\{\varphi(X_{s^-} + g(s,X_{s^-},p_s)) - \varphi(X_{s^-}) - \nabla\varphi(X_{s^-})\bullet g(s,X_{s^-},p_s)\}\\
= \;& \int_0^t\int_{Z_\kappa}\{\varphi(X_{s^-} + g(s,X_{s^-},z)) - \varphi(X_{s^-}) - \nabla\varphi(X_{s^-})\bullet g(s,X_{s^-},z)\}d\mu_{sz}\\
= \;& \int_0^t\int_Z\{\varphi(X_{s^-} + g(s,X_{s^-},z)) - \varphi(X_{s^-}) - \nabla\varphi(X_{s^-})\bullet g(s,X_{s^-},z)\}d\mu_{sz}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{1}_{\{X_s\in\partial D\}}\nabla\varphi(X_s)\bullet \mathbf{v}_{X_s} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
\varphi(X_t) \;=\;& \varphi(X_0) + \int_0^t (\mathcal{L}_s\varphi)(X_s)ds + \int_s^t \nabla\varphi(X_s)f(s,X_s)dW_s\\
&+ \int_0^t\int_Z\{\varphi(X_{s^-} + g(s,X_{s^-},z)) - \varphi(X_{s^-})\}d\overline{\mu}_{sz}\\
&+ \int_0^t\int_Z \mathcal{W}_{tz}(X_s)\gamma(dz)\times ds
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par parties et le lemme 1.5, on obtient:

$$\varphi(X_t)L_t^0$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(X_0) + \int_0^t L^0_{s-} d\varphi(X_s) + \int_0^t \varphi(X_{s-}) dL^0_s + [\varphi(X), L^0]_t \\
&= \varphi(X_0) + \int_0^t L^0_s (\mathcal{L}_s \varphi)(X_s) ds + \int_0^t L^0_s \nabla\varphi(X_s) \cdot f(s, X_s) dW_s \\
&\quad + \int_0^t \int_Z L^0_{s-} \{\varphi(X_{s-} + g(s, X_{s-}, z)) - \varphi(X_{s-})\} d\overline{\mu}_{sz} \\
&\quad + \int_0^t \int_Z L^0_s \mathcal{W}_{tz}(X_s) \gamma(dz) \times ds \\
&\quad + \int_0^t \int_Z L^0_{s-} \varphi(X_{s-})(h(s, X_{s-}, z) - 1) d\overline{\mu}_{sz} \\
&\quad + \int_0^t \int_Z L^0_{s-} [h(s, X_{s-}, z) - 1][\varphi(X_{s-} + g(s, X_{s-}, z)) - \varphi(X_{s-})] d\mu_{sz} \\
&= \varphi(X_0) + \int_0^t L^0_s (\mathcal{L}_s \varphi)(X_s) ds + \int_0^t L^0_s \nabla\varphi(X_s) \cdot f(s, X_s) dW_s \\
&\quad + \int_0^t L^0_s (\mathcal{V}_{sz}\varphi)(X_s) \gamma(dz) \times ds \\
&\quad + \int_0^t \int_Z L^0_{s-} (\mathcal{U}_{sz}\varphi)(X_{s-}) d\overline{\mu}_{sz}
\end{aligned}
$$

D'après (1.11) et les conditions (1.2), (1.3) et (1.4), il est facile de voir que

$$\overline{E}\left(\int_0^t (L^0_s)^2 [\nabla\varphi(X_s)]^2 \cdot f^2(s, X_s) ds\right) \leq \infty$$

et

$$\overline{E}\left(\int_0^t \int_Z (L^0_{s-})^2 [(\mathcal{U}_{sz}\varphi)(X_{s-})]^2 \gamma(dz) \times ds\right) \leq \infty.$$

On termine la preuve du théorème en prenant $\overline{E}(\cdot/\mathcal{F}^\mu_t)$ des deux membres de cette égalité, en commutant l'espérance conditionnelle et l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale par rapport à la mesure γ et en utilisant la proposition suivante:

Proposition 1.7 *Soit $\{U_t, t \geq 0\}$ et $\{V_{tz}, t \geq 0\}$ des processus $\mathcal{F}_t$−progressifs tels que*

$$\overline{E}\left(\int_0^t U_s^2 ds\right) < \infty,$$

$$\overline{E}\left(\int_0^t \int_Z V_{sz}^2 \gamma(dz) \times ds\right) < \infty,$$

alors
$$\overline{E}\left(\int_0^t \int_Z U_s dW_r^j / \mathcal{F}_t^\mu\right) = 0 \quad j = 1, \ldots, m$$
et
$$\overline{E}\left(\int_0^t \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_s / \mathcal{F}_t^\mu\right) = \int_0^t \int_Z \overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_s^\mu) d\overline{\mu}_s$$

Preuve Il est facile de voir que $\overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_t^\mu) = \overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_s^\mu)$ pour tout $t \geq s \geq 0$ car μ est à accroissements indépendants sous $(\Omega, \overline{P})$.

Il nous suffit de démontrer que
$$\overline{E}\left(\eta_t \int_0^t U_s dW_s^j\right) = 0$$
et
$$\overline{E}\left(\eta_t \int_0^t \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_s\right) = \overline{E}\left(\eta_t \int_0^t \int_Z \overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_\infty^\mu) d\overline{\mu}_s\right)$$
pour toute variable aléatoire η_t dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t^\mu, \overline{P})$.

D'après le Théorème de représentation (voir par exemple, [2], page 239), toute variable aléatoire η_t $\mathcal{F}_t^\mu$ mesurable, de carré $\overline{P}$-intégrable et $\overline{P}$ centrée s'écrit sous la forme suivante:
$$\eta_t = \int_0^t \int_Z \rho_{sz} d\overline{\mu}_s$$
où ρ_{tz} est un processus $(\mathcal{F}_t^\mu, \overline{P})$ prévisible et $\overline{E}\left[\int_0^t \int_Z \rho_{sz}^2 \gamma(dz) ds\right] < \infty$.

On note aussi que $\overline{\mu}_t$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu, \overline{P})$ martingale et que W_t est indépendant de $\mathcal{F}_\infty^\mu$ sous $\overline{P}$.

Et on termine la preuve de la proposition en remarquant que:
$$\overline{E}\left(\eta_t \int_0^t U_s dW_s^j\right) = \overline{E}\left(\int_0^t \int_Z \rho_{sz} d\overline{\mu}_s \cdot \int_0^t U_s dW_s^j\right) = 0$$
et que, d'après la formule d'intégration par parties et le lemme 1.5:
$$\begin{aligned}
\overline{E}\left(\eta_t \int_0^t \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_s\right) &= \overline{E}\left(\int_0^t \int_Z \rho_{sz} d\overline{\mu}_s \cdot \int_0^t \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_s\right) \\
&= \overline{E}\left[\int_0 \int_Z \rho_{sz} d\overline{\mu}_s \ , \ \int_0 \int_Z V_{sz} d\overline{\mu}_s\right]_t \\
&= \overline{E}\left(\int_0^t \int_Z \rho_{sz} V_{sz} d\mu_{sz}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{E}\left(\int_0^t \int_Z \rho_{sz} V_{sz} \gamma(dz) \times ds\right) \\
&= \overline{E}\left(\int_0^t \int_Z \rho_{sz} \overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_s^\mu)\gamma(dz) \times ds\right) \\
&= \overline{E}\left(\eta_t \int_0^t \int_Z \overline{E}(V_{sz}/\mathcal{F}_s^\mu) d\overline{\mu}_s\right).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 1.8 Pour l'instant, on n'a pas démontré l'unicité de la solution de l'équation (1.12). On peut penser, au vu des résultats connus, que celui-ci est vrai (malgré la restriction sur φ), mais il ne s'agit pas d'un résultat élémentaire.

1.3 Équation pour la loi conditionnelle normalisée

En utilisant l'équation de Zakai que l'on vient d'obtenir et la formule d'Itô, on peut en déduire l'équation pour la loi conditionnelle normalisée.

On note

$$
\Pi_t(\varphi) = E(\varphi(X_t)/\mathcal{F}_t^\mu), \;\; \Pi_{t^-}(\varphi) = E(\varphi(X_{t^-})/\mathcal{F}_{t^-}^\mu)
$$

on a, alors

$$
\Pi_t(\varphi) = \frac{\Sigma_t(\varphi)}{\Sigma_t(\mathbf{1})}, \;\; \Pi_{t^-}(\varphi) = \frac{\Sigma_{t^-}(\varphi)}{\Sigma_{t^-}(\mathbf{1})}
$$

Si l'on pose

$$
\Pi_{t^-}(h_{tz}) = E(h(t, X_{t^-}, z)/\mathcal{F}_{t^-}^\mu) = \int_D h(t,x,z)\Pi_{t^-}(dx),
$$

on a le

Théorème 1.9 *Sous les même conditions du théorème 1.6, on a*

$$
\begin{aligned}
\Pi_t(\varphi) &= \Pi_0(\varphi) + \int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_s\varphi)ds + \int_0^t \int_Z \Pi_s(\mathcal{V}_{sz}\varphi)\gamma(dz) \times ds \qquad (1.13) \\
&+ \int_0^t \int_Z \frac{\Pi_{s^-}(\mathcal{H}_{sz}\varphi) - \Pi_{s^-}(h_{sz})\Pi_{s^-}(\varphi)}{\Pi_{s^-}(h_{sz})} [d\mu_{sz} - \Pi_{s^-}(h_{sz})\gamma(dz) \times ds]
\end{aligned}
$$

Preuve En prenant $\varphi = \mathbf{1}$ la fonction constante 1 dans l'équation de Zakai, on obtient:

$$\Sigma_t(\mathbf{1}) = 1 + \int_0^t \int_Z \Sigma_{s^-}(h_{sz} - 1)d\overline{\mu}_{sz} = 1 + \int_0^t \Sigma_{s^-}(\mathbf{1}) \int_Z (\Pi_{s^-}(h_{sz}) - 1)d\overline{\mu}_{sz}$$

Par la formule d'Itô, on a

$$\Sigma_t^{-1}(\mathbf{1}) = 1 - \int_0^t \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \int_Z \Pi_{s^-}(h_{sz} - 1)d\overline{\mu}_{sz} + \sum_{0<s\leq t} \left\{ \Delta\Sigma_s^{-1}(\mathbf{1}) + \frac{\Delta\Sigma_s(\mathbf{1})}{\Sigma_{s^-}^2(\mathbf{1})} \right\}$$

mais

$$\Delta\Sigma_s(\mathbf{1}) = \Sigma_{s^-}(\mathbf{1}) \int_{\overline{D}} (h(s,x,p_s) - 1)\Pi_{s^-}(dx) = \Sigma_{s^-}(\mathbf{1})(\Pi_{s^-}(h_{sp_s}) - 1)$$

on a donc,

$$\begin{aligned} \sum_{0<s\leq t} \left\{ \Delta\Sigma_s^{-1}(\mathbf{1}) + \frac{\Delta\Sigma_s(\mathbf{1})}{\Sigma_{s^-}^2} \right\} &= \sum_{0<s\leq t} \left\{ \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \frac{\left(\frac{\Delta\Sigma_s(\mathbf{1})}{\Sigma_{s^-}(\mathbf{1})}\right)^2}{1 + \frac{\Delta\Sigma_s(\mathbf{1})}{\Sigma_{s^-}(\mathbf{1})}} \right\} \\ = \sum_{0<s\leq t} \left\{ \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \frac{[\Pi_{s^-}(h_{sp_s}) - 1]^2}{\Pi_{s^-}(h_{sp_s})} \right\} &= \int_0^t \int_Z \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \frac{[\Pi_{s^-}(h_{sz}) - 1]^2}{\Pi_{s^-}(h_{sz})} d\mu_{sz} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{-1}(\mathbf{1}) &= 1 + \int_0^t \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \int_Z \left(\frac{1}{\Pi_{s^-}(h_{sz})} - 1 \right) d\overline{\mu}_{sz} \\ &\quad + \int_0^t \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) \int_Z \frac{[\Pi_{s^-}(h_{sz}) - 1]^2}{\Pi_{s^-}(h_{sz})} \gamma(dz) \times ds \end{aligned}$$

On utilise la formule d'intégration par parties et le lemme 1.5 pour finir la preuve du théorème.

$$\begin{aligned} \Pi_t(\varphi) &= \Sigma_t(\varphi)\Sigma_t^{-1}(\mathbf{1}) \\ &= \Pi_0(\varphi) + \int_0^t \Sigma_{s^-}(\varphi) d\Sigma_s^{-1}(\mathbf{1}) + \int_0^t \Sigma_{s^-}^{-1}(\mathbf{1}) d\Sigma_s(\varphi) + [\Sigma(\varphi), \Sigma^{-1}(\mathbf{1})]_t \\ &= \Pi_0(\varphi) + \int_0^t \Pi_{s^-}(\varphi) \int_Z \left(\frac{1}{\Pi_{s^-}(h_{sz})} - 1 \right) d\overline{\mu}_{sz} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \Pi_{s^-}(\varphi)\int_Z \frac{[\Pi_{s^-}(h_{sz})-1]^2}{\Pi_{s^-}(h_{sz})}\gamma(dz)\times ds\\
&+\int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_s\varphi)ds+\int_0^t\int_Z \Pi_{s^-}(\mathcal{U}_{sz}\varphi)d\overline{\mu}_{sz}\\
&+\int_0^t\int_Z \Pi_{s^-}(\mathcal{V}_{sz}\varphi)\gamma(dz)\times ds\\
&+\int_0^t\int_Z \Pi_{s^-}(\mathcal{U}_{sz}\varphi)\left(\frac{1}{\Pi_{s^-}(h_{sz})}-1\right)d\mu_{sz}\\
= {}& \Pi_0(\varphi)+\int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_s\varphi)ds+\int_0^t\int_Z \Pi_{s^-}(\mathcal{V}_{sz}\varphi)\gamma(dz)\times ds\\
&+\int_0^t\int_Z \frac{\Pi_{s^-}(\mathcal{H}_{sz}\varphi)-\Pi_{s^-}(h_{sz})\Pi_{s^-}(\varphi)}{\Pi_{s^-}(h_{sz})}[d\mu_{sz}-\Pi_{s^-}(h_{sz})\gamma(dz)\times ds]
\end{aligned}
$$

Remarque 1.10 Quand $g = \mathbf{0}$, $\Pi_{t^-}(\mathcal{H}_{tz}\varphi) - \Pi_{t^-}(h_{tz})\Pi_{t^-}(\varphi)$ devient la covariance conditionnelle de h et φ sous P à l'instant t^-.

2 Un filtre approché dans un cas particulier

2.1 Position du problème dans un cas particulier d'une observation de grande intensité

On étudie ici notre problème de filtrage dans un cas particulier. On pose $m = 1$, $D = \mathbb{R}^+$, $\partial D = \{0\}$. On pose $g = 0$. On garde les hypothèses que b et f sont lipchitziens. Ce qui implique que X_t devient tout simplement une diffusion réfléchie au point 0. On suppose en outre que Z se réduit à un seul point $\{z\}$ et que γ est la mesure de Dirac sur Z. On note l'observation Y_t en enlevant l'indice z de μ_{tz}.

On peut maintenant définir directement la probabilité P. Plus précisément on pose le problème de la façon suivante. Soit $(\Omega, \mathcal{G}, P, \mathcal{G}_t)$ un espace de probabilité filtré habituel. $(W_t, t \geq 0)$ est une mouvement brownien standard sous $(P, \mathcal{G}_t)$. Le signal X_t est déterminé par le système suivant:

$$
\left\{\begin{array}{l} X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t f(X_s)dW_s + \Phi_t \\ X_t \geq 0, \quad \int_0^t X_s d\Phi(s) = 0 \ \ \forall t \geq 0 \end{array}\right. \tag{2.1}
$$

L'observation Y_t est un Processus de type Poisson sous $(P, \mathcal{G}_t)$ d'intensité $\frac{h(X_t)}{\epsilon}$ de saut éventuel égal à 1. Autrement dit, Y_t est un Processus croissant à valeures entièrs et $M_t = Y_t - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t h(X_s)ds$ est une $(P, \mathcal{G}_t)$ martingale et ϵ est un paramètre dont la valeur est une constante positive.

On note que l'on observe de mieux en mieux X_t quand ϵ devient de plus en plus petit. En effet, on trouve un phénomène de convergence.

2.2 L'analyse de la situation limite quand ϵ tend vers 0

Supposons tout d'abord

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq C_1 |x_1 - x_2|^\theta \quad 0 < \theta \leq 1. \tag{2.2}$$

De plus, on sait que sous certaines conditions, on a

$$E|X_t - X_s| \leq C_2 \sqrt{|t-s|} \tag{2.3}$$

On s'intéresse tout d'abord au comportement de la limite quand ϵ tend vers 0. Si $h(x)$ est inversible, X_t est observé exactement au sens suivant:

Proposition 2.1 *Sous les conditions (2.2) et (2.3),* $\epsilon^\beta(Y_{t+\epsilon^{1-\beta}} - Y_t)$ *tend vers en loi* $h(X_t)$ *si* $\beta \in [0, 1)$.

Pour vérifier cette proposition, on va utiliser le

Lemme 2.2 *Soit* $\{X_n : n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires suivant la loi de Poisson de paramètre* λ_n *avec* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. *Alors* $\frac{X_n}{\lambda_n}$ *tend vers* 1 *en loi.*

Preuve Il suffit de voir la convergence des fonctions caractéristiques de $\frac{X_n}{\lambda_n}$.
□

Preuve de la proposition 2.1 Comme la loi conditionnelle de $Y_{t+\epsilon^{1-\beta}} - Y_t$ sachant $\mathcal{F}^X_{t+\epsilon^{1-\beta}}$ est une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon^{1-\beta}} h(X_s)ds$, il nous suffit de vérifier la convergence de ce paramètre d'après le lemme 2.2.

Pour cela, on note que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon^{1-\beta}} h(X_s)ds}{\frac{1}{\epsilon^\beta}} &= \epsilon^{\beta-1}\int_t^{t+\epsilon^{1-\beta}} h(X_s)ds \\ = \quad h(X_t) &+ \epsilon^{\beta-1}\int_0^{\epsilon^{1-\beta}} [h(X_{t+s}) - h(X_t)]ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{\beta-1} E \left| \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} [h(X_{t+s}) - h(X_t)] ds \right| \leq C_1 \epsilon^{\beta-1} E \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} |X_{t+s} - X_t|^\theta ds \\
= \quad & C_1 \epsilon^{\beta-1} \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} E(|X_{t+s} - X_t|^\theta) ds \leq C_1 \epsilon^{\beta-1} \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} (E|X_{t+s} - X_t|)^\theta ds \\
\leq \quad & C_1 C_2 \epsilon^{\beta-1} \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} s^{\frac{\theta}{2}} ds = \frac{C_1 C_2}{1 + \frac{\theta}{2}} \epsilon^{\frac{\theta}{2}(1-\beta)}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\beta-1} E \left| \int_0^{\epsilon^{1-\beta}} [h(X_{t+s}) - h(X_t)] ds \right| = 0$$

□

2.3 Un filtre approché en dimension finie

L'analyse de la situation limite quand ϵ tend vers 0 nous motive pour trouver des filtres suboptimaux quand ϵ devient très petit. Et l'efficacité du filtre peut être mesurée par la grandeur de la différence entre le signal et le filtre par rapport à certaines puissances de ϵ.

J. Picard a étudié un problème de filtrage quand le signal X_t et l'observation Y_t sont des diffusions dans le cas de bruits faibles dans [10] et [11]. On note que l'observation ϵY_t donne la même information que Y_t. Et ses bruits ϵM_t sont faibles quand ϵ devient petit. Il se trouve qu'on peut utiliser certaines idées analogues pour résoudre notre problème. On trouve un filtre approché en dimension finie N_t de X_t.

En effet, le résultat principal est le suivant:

Théorème 2.3 *Soit $h : I\!R^+ \to I\!R^+$ une fonction croissante. On suppose de plus qu'il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 et $c_4(T)$ telles que:*

$$\begin{aligned}
| h(x_1) - h(x_2) | \quad & \geq \quad c_1 \mid x_1 - x_2 \mid && (2.4) \\
| b(x_1) - b(x_2) | \quad & \leq \quad c_2 \mid x_1 - x_2 \mid^\gamma \quad 0 < \gamma \leq 1 && (2.5) \\
| f(x) | \quad & \leq \quad c_3 && (2.6) \\
\sup_{0 \leq t \leq T} E[h(X_t)] \quad & \leq \quad c_4(T) && (2.7)
\end{aligned}$$

pour tout x, x_1, $x_2 \geq 0$.

On définit un filtre N_t de X_t par le système suivant:

$$\begin{cases} N_t = N_0 + \int_0^t b(N_s)ds + \sqrt{\epsilon}\int_0^t K_s\left[dY_s - \frac{h(N_s)}{\epsilon}ds\right] + V_t \\ N_0 \geq 0,\ V_0 = 0,\ V_t \text{ est non-décroissante et } \int_0^t N_s dV_s = 0 \ \ \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

où $K_s > 0$.

On pose $G_t = X_t - N_t$, *alors*

$$\sup_{0\leq t\leq T} E|G_t|^2 \leq \exp\left(-\frac{t}{O(\sqrt{\epsilon})}\right)E|G_0|^2 + O(\sqrt{\epsilon})$$

si $\epsilon < \dfrac{c_1^2 K_t^2}{c_2^2}$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Preuve Pour simplifier les notations, on suppose que K_s est une constante K.

D'après (2.1) et (2.8), on a

$$\begin{aligned} G_t &= G_0 + \int_0^t (b(X_s) - b(N_s))ds - \frac{K}{\sqrt{\epsilon}}\int_0^t (h(X_s) - h(N_s))ds \\ &\quad + \int_0^t f(X_s)dW_s - \sqrt{\epsilon}KM_t + \Phi_t - V_t \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la formule d'Itô:

$$\begin{aligned} G_t^2 &= G_0^2 + 2\int_0^t G_{s^-}dG_s + \int_0^t d < X, X >_s + \sum_{0\leq s\leq t}\left[G_s^2 - G_{s^-}^2 - 2G_{s^-}\Delta G_s\right] \\ &= G_0^2 + 2\int_0^t G_{s^-}dG_s + \int_0^t f^2(X_s)ds + \sum_{0\leq s\leq t}(\Delta G_s)^2 \\ &= G_0^2 + \int_0^t f^2(X_s)ds + 2\int_0^t G_s d\Phi_s - 2\int_0^t G_s dV_s \\ &\quad -2\int_0^t \left\{G_s\left[\frac{K}{\sqrt{\epsilon}}(h(X_s) - h(N_s)) - (b(X_s) - b(N_s))\right]\right\}ds \\ &\quad +2\int_0^t \left\{G_{s^-}\left[f(X_s)dW_s - \sqrt{\epsilon}KdM_s\right]\right\} + \epsilon K^2 \sum_{0\leq s\leq t}(\Delta Y_s)^2. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{0\leq s\leq t}(\Delta Y_s)^2 = \sum_{0\leq s\leq t}\Delta Y_s = Y_t = M_t + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t h(X_s)ds,$$

et

$$\int_0^t G_s d\Phi_s - \int_0^t G_s dV_s = -\int_0^t X_s dV_s - \int_0^t N_s d\Phi_s$$

on obtient

$$\begin{aligned}
G_t^2 &= G_0^2 + \int_0^t f^2(X_s)ds + K^2 \int_0^t h(X_s)ds \\
&\quad -2\int_0^t \left\{ G_s \left[\frac{K}{\sqrt{\epsilon}} (h(X_s) - h(N_s)) - (b(X_s) - b(N_s)) \right] \right\} ds \\
&\quad +2\int_0^t \left\{ G_{s-} \left[f(X_s)dW_s - \sqrt{\epsilon} K dM_s \right] \right\} + \epsilon K^2 M_t \\
&\quad -2\int_0^t X_s dV_s - 2\int_0^t N_s d\Phi_s.
\end{aligned}$$

On pose $A_t = \int_0^t X_s dV_s + \int_0^t N_s d\Phi_s$. En prenant l'espérance de chaque côté, on obtient:

$$\begin{aligned}
E(G_t^2) &= E(G_0^2) + \int_0^t E[f^2(X_s)]ds + K^2 \int_0^t E[h(X_s)]ds - 2E(A_t) \\
&\quad -2\int_0^t E\left\{ G_s \left[\frac{K}{\sqrt{\epsilon}} (h(X_s) - h(N_s)) - (b(X_s) - b(N_s)) \right] \right\} ds
\end{aligned}$$

Notons que A_t est non-décroissant car $X_s, N_s \geq 0$ et Φ_s, V_s sont non-décroissants. On note aussi que $E(|G_t|^{1+\gamma}) \leq 1 + E(G_t^2)$. Soit $d_1 = 2c_2 + c_3^2 + c_4 K^2$ et $d_2 = \frac{2(c_1 K - c_2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}$.

En utilisant les hypothèses (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{d_2 s}[dE(G_t^2) + d_2 E(G_s^2)ds] \\
= &\int_0^t e^{d_2 s}\{E[f^2(X_s)] + K^2 E[h(X_s)]\}ds \\
&-2\int_0^t e^{d_2 s} E\left\{ G_s \left[\frac{K}{\sqrt{\epsilon}} (h(X_s) - h(N_s)) - (b(X_s) - b(N_s)) \right] \right\} ds \\
&+\int_0^t d_2 e^{d_2 s} E(G_s^2)ds - 2\int_0^t e^{d_2 s} dE(A_s) \\
\leq &\int_0^t e^{d_2 s}(c_3^2 + c_4 K^2)ds + \int_0^t d_2 e^{d_2 s} E(G_s^2)ds \\
&-2\int_0^t e^{d_2 s}\left[\frac{c_1 K}{\sqrt{\epsilon}} E(G_s^2) - c_2 E(|G_s|^{1+\gamma}) \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t e^{d_2 s}(2c_2 + c_3^2 + c_4 K^2)ds - \int_0^t e^{d_2 s}\left[\frac{2(c_1 K - c_2\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}} - d_2\right] E(G_s^2)ds \\
&= d_1 \int_0^t d^{d_2 s} ds
\end{aligned}$$

d'où on obtient:

$$\begin{aligned}
E(G_t^2) &= e^{-d_2 t}E(G_0^2) + e^{-d_2 t}\int_0^t e^{d_2 s}[dE(G_s^2) + d_2 E(G_s^2)ds] \\
&\leq e^{-d_2 t}E(G_0^2) + d_1 e^{-d_2 t}\int_0^t e^{d_2 s}ds \\
&= e^{-d_2 t}E(G_0^2) + \frac{d_1}{d_2}(1 - e^{-d_2 t}) \\
&\leq e^{-d_2 t}E(G_0^2) + \frac{d_1}{d_2}
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de terminer la preuve du théorème car $d_2 > 0$ et $\frac{1}{d_2} = O(\sqrt{\epsilon})$ quand ϵ tend vers 0. $\square$

Remarque 2.4 Il est évident que l'on peut obtenir la même majoration de $E|G_t|^2$ pour $t \in [0, +\infty[$ si on remplace la condition (2.7) par

$$\sup_{t\geq 0} E[h(X_t)] \leq c_4$$

ce qui peut être satisfait, par exemple, sous la condition (2.2) et si X_t est une diffusion réfléchie dans un intervalle borné de $\mathbb{R}_+$.

Remarque 2.5 On n'est pas capable pour l'instant d'obtenir un résultat analogue pour $E|X_t - N_t|^p$ quand $p \geq 2$ car la méthode ci-dessus ne s'applique plus. En effet, on a d'après la formule d'Itô:

$$\begin{aligned}
|G_t|^p &= |G_0|^p + p\int_0^t sign(G_{s^-})|G_{s^-}|^{p-1}dG_s + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^t |G_{s^-}|^{p-2}f^2(X_s)ds \\
&\quad + \sum_{0\leq s\leq t}[|G_s|^p - |G_{s^-}|^p - p\cdot sign(G_{s^-})|G_{s^-}|^{p-2}\Delta G_s]
\end{aligned}$$

et on est obligé de majorer le dernier terme car il est trop difficile de le calculer explicitement. Donc on ne peut pas obtenir une inégalité analogue de $dE(|G_t|^p)$, ce qui nous empêche d'avoir un résultat analogue pour $E(|G_t|^p)$.

Remarque 2.6 Un problème ouvert et intéressant est de trouver des filtres plus efficaces en précisant un peu la valeur de K_t. Mais il nous semble que c'est assez délicat pour l'instant. En effet, les techniques que J. Picard a utilisées pour trouver des filtres sub-optimaux dans son contexte demandent souvent la manipulation de la dérivée de X_t par rapport à sa valeur initialle X_0. Mais il n'y a pas de résultat intéressant à ce sujet quand X_t est une diffusion réfléchie. Notons tout de même que l'on peut trouver des résultats de continuité de type höldérien dans [5].

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, J.L. Lions : Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationelles, Dunod, Paris, 1982.

[2] P. Brémaud : Point processes and queues, martingale dynamics, Springer-Verlag, 1981.

[3] P. Brémaud, J. Jacod : Processus Ponctuels et Martingales: Résultats Récents sur la Modélisation et le Filtrage, *Adv. Appl. Prob.* **9** 362-416, 1977.

[4] M. Chaleyat-Maurel, N. El Karoui, B. Marchal : Réflexion discontinue et systèmes stochastiques, *Ann. Probab.* **8** 1049-1067, 1980.

[5] P. Dupuis, H. Ishii : On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorokhod problem, with applications **35** 31-62, 1991.

[6] J. Jacod : Calcul stochastique et problème de martingales, Lecture Notes in Mathematics **714**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.

[7] P.L. Lions, A.S. Sznitman : Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** 511-537, 1984.

[8] J.L. Menaldi, M. Robin : Reflected diffusion processes with jumps, *Ann. Probab.* **13** 319-341, 1985.

[9] E. Pardoux : Filtrage non linéaire et equations aux derivées partielles stochastiques associées, *Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour*, 1989.

[10] J. Picard : Nonlinear filtering of one dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio, *Siam J. Appl. Math.* **46**, 1098-1125, 1986.

[11] J. Picard : Asymptotic study of estimation problems with small observation noise, in *Stochastic Modelling and Filtering*, Lecture Notes in Control and Info. Scie. **91**, Springer 1987.

[12] P. Protter : Stochastic intergration and differential equation, a new approach, Springer-Verlag, 1990.

[13] Y. Saisho : Stochastic Differential Equations for Multi-dimensional Domain with Reflecting Boundary, *Probab. Th. Rel. Fields* **74** 455-477, 1987.

[14] C. Stricker, M. Yor : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre, *Z. Wahrscleinlichkeitseheorie* **45** 109-134, 1978.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technôpole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, IRISA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249-6399